

# Variations et extremums

cours et exercices corrigés de maths 2nde

Un tableau de variations tient en deux flèches et trois nombres, et pourtant il dit tout : où la fonction monte, où elle descend, et quelle est la plus grande valeur qu'elle atteint. C'est le résumé d'une courbe, écrit en une ligne.

## MOTS CLÉS

**Croissante, décroissante, maximum, minimum, extremum**

## LE SECRET

**Le sens change là où se trouve l'extremum**

## OUTIL

**Le tableau de variations**

## À quoi ça sert : Variations et extremums

La température d'une journée à Saint-Denis monte du lever du soleil jusqu'en début d'après-midi, puis redescend jusqu'au matin suivant. Un tableau de variations le dit en une ligne : croissante jusqu'à 14 h, décroissante ensuite, avec un maximum de 29 °C atteint à 14 h.

## Un peu d'histoire : Variations et extremums

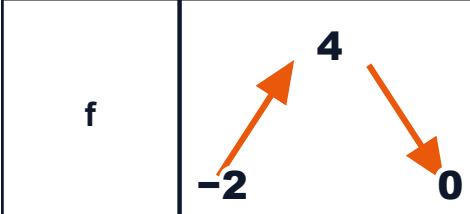
Avant le calcul différentiel, on cherchait les maximums au cas par cas, par des astuces géométriques. Fermat, vers 1636, remarque que la courbe « s'aplatit » près d'un extremum — l'idée qui deviendra la dérivée, et qui fera du tableau de variations un outil systématique.

## Définition : Variations et extremums

Une fonction est **CROISSANTE** sur un intervalle si, quand  $x$  augmente,  $f(x)$  augmente aussi : l'ordre est conservé. Elle est **DÉCROISSANTE** si l'ordre s'inverse. Le tableau de variations résume ces sens par des flèches, et donne les valeurs atteintes aux bornes.

### f croît puis décroît

| x | -3 | 1 | 5 |
|---|----|---|---|
| f | -2 | 4 | 0 |



La flèche monte jusqu'en 1, puis redescend.  
La fonction atteint 4 en  $x = 1$  : c'est son maximum.

# Propriétés : Variations et extremums

## L'ordre des images

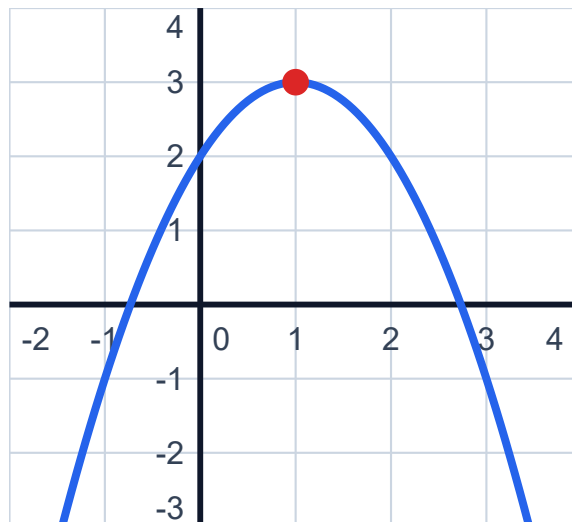
Croissante :  $a < b$  donne  $f(a) < f(b)$ , l'ordre est CONSERVÉ. Décroissante : il s'INVERSE. C'est ce qui permet de comparer deux images sans les calculer.

### Croissante : l'ordre tient

| $x$ | 0 | 6 |
|-----|---|---|
| $f$ | 1 | 7 |

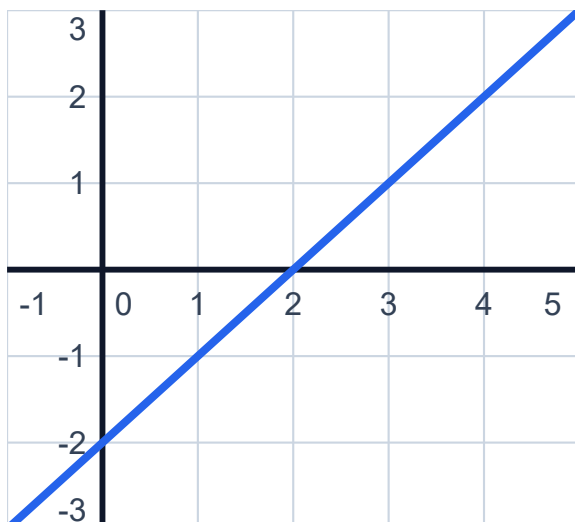
## L'extremum est une ORDONNÉE

Au changement de sens, la fonction atteint un extremum. L'abscisse dit OÙ il est atteint, l'ordonnée dit COMBIEN il vaut — confondre les deux est l'erreur la plus fréquente.



## Croissante n'est pas positive

Le sens de variation et le signe sont deux lectures du même dessin, et elles ne disent pas la même chose : une courbe peut monter en restant sous l'axe des abscisses.



## Le tableau résume la courbe

Deux flèches et trois nombres remplacent tout le dessin. On y lit le sens, les extremums, et les valeurs aux bornes de l'intervalle d'étude.

| $x$     | -2 | 0  | 3 |
|---------|----|----|---|
| $f'(x)$ | -  | 0  | + |
| $f$     | 5  | -1 | 8 |

# Méthode : Variations et extremums

## 1. Je repère les changements de sens

Sur la courbe, je cherche les endroits où elle cesse de monter pour descendre, ou l'inverse. Chacun donne une colonne du tableau.

Tableau de valeurs

| x    | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|------|----|---|---|---|---|
| f(x) | 0  | 3 | 4 | 3 | 0 |

## 2. Je dresse le tableau

Les abscisses de ces changements, plus les bornes de l'intervalle, forment la ligne du haut. Entre elles, une flèche par intervalle.

Tableau de valeurs

| x    | -1 | 1 | 3 |
|------|----|---|---|
| f(x) | 0  | 4 | 0 |

## 3. Je lis l'extremum

Au sommet d'une flèche montante suivie d'une descendante : un maximum. Sa valeur est l'ORDONNÉE écrite à cet endroit.

Tableau de valeurs

| x    | 0 | 1 | 2 |
|------|---|---|---|
| f(x) | 3 | 4 | 3 |

## Selon ce que l'on cherche : Variations et extremums

### Comparer sans calculer

Si  $f$  croît sur  $[0 ; 6]$ , alors  $f(2) < f(5)$  — sans connaître ni l'une ni l'autre valeur.

#### Croissante sur $[0 ; 6]$

| $x$ | 0 | 6 |
|-----|---|---|
| $f$ | 1 | 7 |

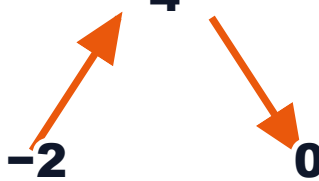


### Trouver un maximum

Le tableau le donne directement : c'est la valeur au sommet, atteinte à l'abscisse écrite au-dessus.

#### Maximum 4 en 1

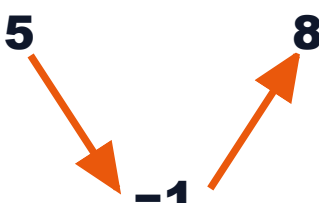
| $x$ | -3 | 1 | 5 |
|-----|----|---|---|
| $f$ | -2 | 4 | 0 |



### Lire un signe de dérivée

En première, la ligne du haut donnera le signe de  $f'$  : positif quand  $f$  monte, négatif quand elle descend.

| $x$     | -2 | 0  | 3 |
|---------|----|----|---|
| $f'(x)$ | -  | 0  | + |
| $f$     | 5  | -1 | 8 |



## Exemples corrigés : Variations et extremums

### Comparer deux images

$f$  est croissante sur  $[0 ; 10]$ .

Comparer  $f(3)$  et  $f(7)$ .

Tableau de valeurs

| x    | 0 | 3 | 7 | 10 |
|------|---|---|---|----|
| f(x) | 1 | 4 | 8 | 11 |

Les deux nombres appartiennent à  $[0 ; 10]$ , et  $3 < 7$ . Comme  $f$  croît, l'ordre est CONSERVÉ :  $f(3) < f(7)$ . On conclut sans calculer une seule image.

### Le sens s'inverse

$g$  est décroissante sur  $[-4 ; 0]$ .

Comparer  $g(-3)$  et  $g(-1)$ .

Tableau de valeurs

| x    | -4 | -3 | -1 | 0 |
|------|----|----|----|---|
| f(x) | 9  | 7  | 3  | 1 |

$-3 < -1$ , mais  $g$  DÉCROÎT : l'ordre s'inverse, donc  $g(-3) > g(-1)$ . Le tableau le confirme,  $7 > 3$  — attention, sur les négatifs le réflexe se trompe souvent.

### Lire un maximum

$h$  croît sur  $[-3 ; 1]$  puis décroît sur  $[1 ; 5]$ , avec  $h(1) = 4$ .

Quel est le maximum de  $h$ , et où est-il atteint ?

Tableau de valeurs

| x    | -3 | 1 | 5 |
|------|----|---|---|
| f(x) | -2 | 4 | 0 |

Le changement de sens a lieu en  $x = 1$ , et la fonction y vaut 4. Le MAXIMUM vaut 4 — c'est l'ordonnée — et il est ATTEINT EN 1 — c'est l'abscisse. Les deux nombres ne jouent pas le même rôle.

### Monter sans être positive

$u$  croît sur  $[-1 ; 5]$ , avec  $u(-1) = -2$  et  $u(5) = 4$ .

$u$  est-elle positive sur tout l'intervalle ?

Tableau de valeurs

| x    | -1 | 1 | 3 | 5 |
|------|----|---|---|---|
| f(x) | -2 | 0 | 2 | 4 |

Non. Elle MONTE partout, mais elle part de  $-2$  : elle reste négative jusqu'à s'annuler en 1, puis devient positive. Croissante et positive sont deux choses différentes.

## Pièges à éviter : Variations et extremums

- CROISSANTE n'est pas POSITIVE. Une courbe peut monter en restant tout entière sous l'axe des abscisses.
- Un EXTREMUM est une ORDONNÉE. L'abscisse dit où il est atteint, l'ordonnée dit combien il vaut — c'est l'erreur la plus fréquente du chapitre.
- Sur une fonction DÉCROISSANTE, l'ordre des images s'INVERSE. Le réflexe « plus grand donne plus grand » se trompe une fois sur deux.
- Une fonction n'est croissante que SUR UN INTERVALLE. Dire «  $f$  est croissante » sans préciser où ne veut rien dire.
- Un tableau de variations ne donne PAS les valeurs entre deux bornes : il dit seulement dans quel sens on va de l'une à l'autre.

## À retenir : Variations et extremums

Croissante :  $a < b$  donne  $f(a) < f(b)$  — l'ordre est conservé.

Décroissante :  $a < b$  donne  $f(a) > f(b)$  — l'ordre s'inverse.

Le sens change exactement là où se trouve un extremum.

Un maximum est la plus grande ORDONNÉE atteinte ; son abscisse dit seulement où.

Le tableau se lit de gauche à droite, comme la courbe.

Comparer deux images sans les calculer : c'est à cela que sert le sens de variation.

## Exercices corrigés : Variations et extremums

1.  $f$  est croissante sur  $[0 ; 8]$ . Comparer  $f(2)$  et  $f(6)$ .

Correction :

$2 < 6$  et les deux sont dans  $[0 ; 8]$ . La fonction croît, donc l'ordre est conservé :  $f(2) < f(6)$ .

2.  $g$  est décroissante sur  $[1 ; 9]$ . Comparer  $g(3)$  et  $g(8)$ .

Correction :

$3 < 8$ , mais  $g$  décroît : l'ordre s'INVERSE. Donc  $g(3) > g(8)$ .

**3.  $h$  est décroissante sur  $[-5 ; -1]$ . Comparer  $h(-4)$  et  $h(-2)$ .**

**Correction :**

$-4 < -2$  — on compare bien les antécédents, pas leurs valeurs absolues. Comme  $h$  décroît,  $h(-4) > h(-2)$ .

**4. Une fonction croît sur  $] -\infty ; 2]$  puis décroît sur  $[2 ; +\infty[$ . Que se passe-t-il en  $x = 2$  ?**

**Correction :**

Le sens change : la fonction y atteint un MAXIMUM. Elle monte jusqu'en 2, puis redescend.

**5. Une fonction décroît puis croît. Le changement de sens donne un maximum ou un minimum ?**

**Correction :**

Un MINIMUM : la fonction descend jusqu'à un creux, puis remonte. Le creux est la plus petite valeur atteinte.

**6. Dans un tableau de variations, que signifie une flèche qui descend ?**

**Correction :**

Que la fonction est DÉCROISSANTE sur cet intervalle : quand  $x$  augmente,  $f(x)$  diminue.

**7. Un tableau donne  $f(-1) = 3$  et  $f(4) = 9$ , avec une flèche montante entre les deux. Que vaut  $f(2)$  ?**

**Correction :**

On ne peut pas le savoir. Le tableau dit seulement que  $f(2)$  est compris entre 3 et 9 — il ne donne aucune valeur intermédiaire.

**8.  $f$  croît sur  $[-2 ; 3]$  puis décroît sur  $[3 ; 7]$ , et  $f(3) = 10$ . Quel est le maximum de  $f$  ?**

**Correction :**

Le maximum vaut 10 — c'est l'ordonnée, la valeur atteinte. Il est atteint EN  $x = 3$ , qui est l'abscisse. Répondre 3 serait confondre les deux.

**9. Une fonction croît sur  $[0 ; 5]$  avec  $f(0) = -4$  et  $f(5) = -1$ . Est-elle positive ?**

**Correction :**

Non : elle monte, mais elle reste **NÉGATIVE** sur tout l'intervalle, de  $-4$  à  $-1$ . Croissante ne veut pas dire positive.

**10. Peut-on dire «  $f$  est croissante » sans autre précision ?**

**Correction :**

Non. Une fonction est croissante **SUR UN INTERVALLE**. La fonction carré, par exemple, décroît sur les négatifs et croît sur les positifs : dire qu'elle est croissante, sans préciser où, est faux.