

Les vecteurs du plan

cours et exercices corrigés de maths 2nde

Un vecteur n'est pas un point : c'est un DÉPLACEMENT. Il ne dit pas où l'on est, il dit de combien on bouge et dans quelle direction. Deux flèches situées à l'autre bout de la figure peuvent donc être le même vecteur — et c'est ce qui va tout simplifier.

MOTS CLÉS

Déplacement, direction, sens, longueur

LE SECRET

Un vecteur n'a pas de place : on peut le déplacer

OUTIL

La translation qui va de A vers B

À quoi ça sert : les vecteurs du plan

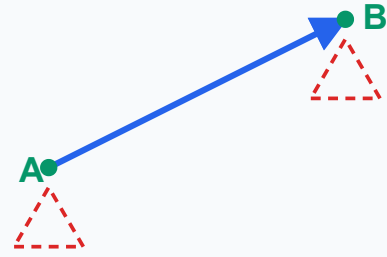
Un avion vole vers l'ouest à 800 km/h et rencontre un vent du sud à 60 km/h. Sa trajectoire réelle n'est ni l'une ni l'autre : c'est la SOMME des deux vecteurs vitesse, et le pilote doit corriger son cap pour compenser. C'est exactement la relation de Chasles, appliquée à des vitesses plutôt qu'à des points. Les vecteurs sont nés de là — de la nécessité de composer deux effets qui agissent en même temps.

Un peu d'histoire : les vecteurs du plan

L'idée de composer deux déplacements est très ancienne — Aristote parlait déjà de mouvements combinés — mais le vecteur comme objet mathématique n'apparaît qu'au XIX^e siècle. Michel Chasles, dont la relation porte le nom, publie en 1852 ; Hermann Grassmann avait posé les bases d'une « théorie de l'extension » dès 1844, dans un livre que presque personne ne comprit à l'époque. Le mot « vecteur » vient du latin *vehere*, « transporter » — ce qui décrit bien ce que fait un déplacement.

Définition : les vecteurs du plan

Le vecteur $\vec{AB}$ est le déplacement qui mène de A à B . Il est défini par trois données seulement : sa **DIRECTION** (celle de la droite (AB)), son **SENS** (de A vers B) et sa **NORME** $\|\vec{AB}\|$, qui est la longueur AB . ★ Aucune de ces trois données ne dit OÙ se trouve le vecteur : il n'a pas de position.



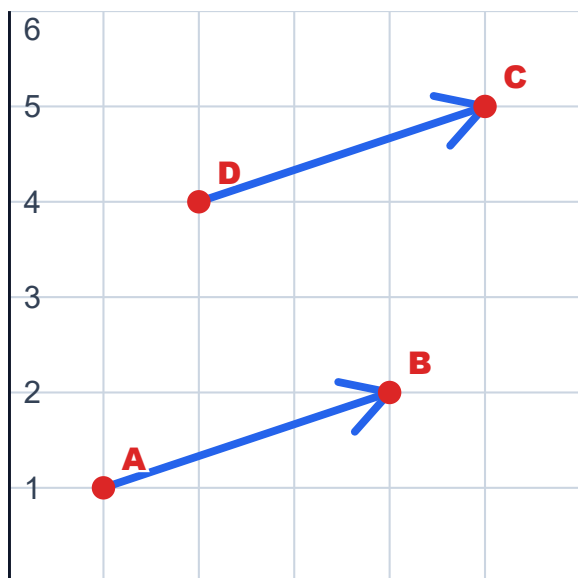
Le vecteur bleu ne bouge pas : c'est l'ordre de se déplacer. Le triangle rouge obéit.

$\vec{AB}$ est la **TRANSLATION** qui mène de A à B . Le triangle ne fait qu'obéir : il garde sa forme, sa taille et son orientation, et se contente de glisser. ★ C'est pour cela qu'un vecteur n'a pas de position — il ne dit pas OÙ l'on est, il dit **COMMENT** bouger.

Propriétés : les vecteurs du plan

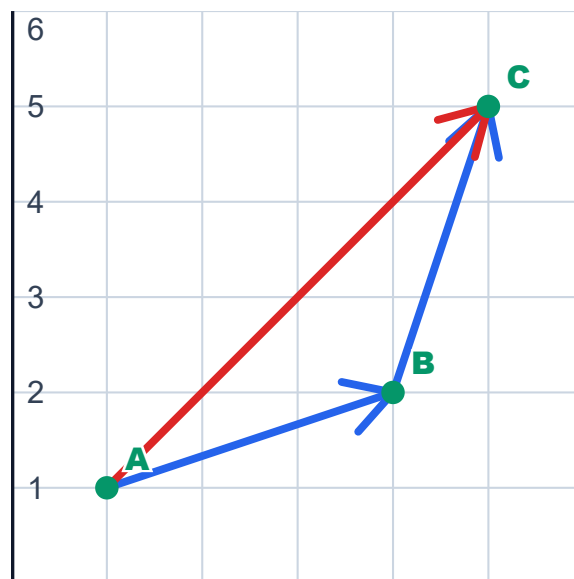
Deux vecteurs égaux, c'est un parallélogramme

★ $ABCD$ est un parallélogramme SI ET SEULEMENT SI $\vec{AB} = \vec{DC}$. Ces deux vecteurs sont les côtés $[AB]$ et $[DC]$: même direction, même sens, même longueur — c'est exactement ce que dit un parallélogramme. ⚠ Bien $\vec{DC}$, et non $\vec{CD}$: il faut parcourir le second côté dans le MÊME sens que le premier.



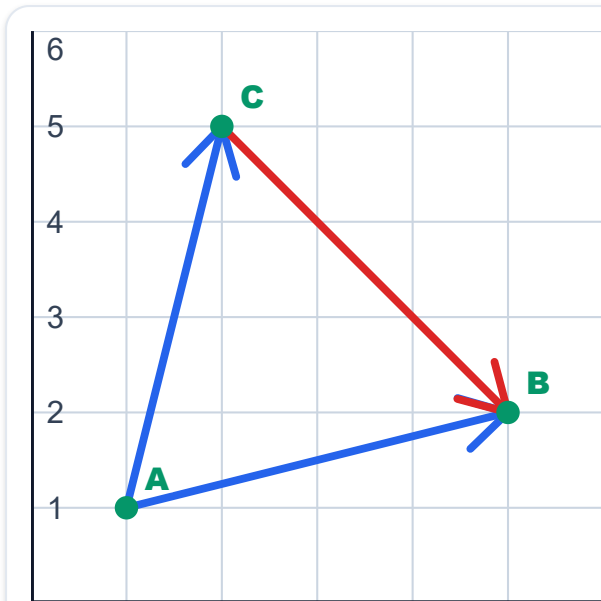
La relation de Chasles

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$: aller de A à B puis de B à C , c'est aller de A à C . La lettre du milieu DISPARAÎT — c'est le point de passage.



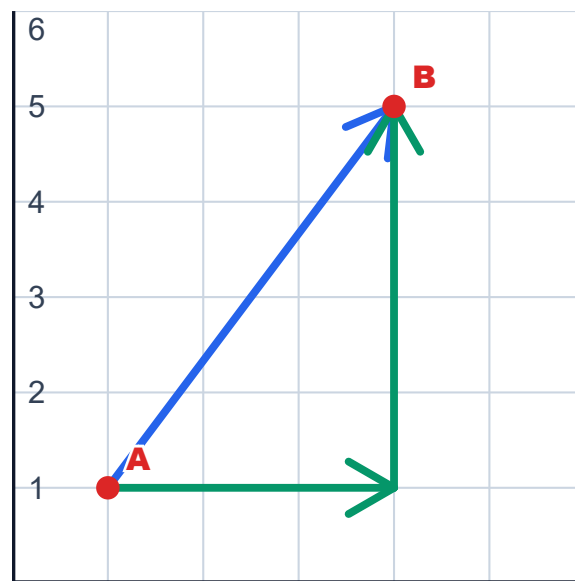
- La différence retourne les lettres

$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$, et NON $\vec{BC}$. Soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé : $-\vec{AC} = \vec{CA}$, donc $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$. L'ordre du résultat est l'inverse de celui qu'on lit.



En coordonnées : une soustraction

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ — l'arrivée MOINS le départ. Ci-contre $A(1; 1)$ et $B(4; 5)$ donnent $\vec{AB}(3; 4)$, et les deux écarts verts forment le triangle rectangle qui donne la norme : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.



Méthode : les vecteurs du plan

1. Je cherche la lettre de passage

Dans une somme, deux vecteurs s'enchaînent quand l'arrivée du premier est le départ du second. Cette lettre-là disparaît.

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

La lettre rouge est le point de passage : elle disparaît.

2. Je réorganise si besoin

Une somme se réordonne librement. $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC}$ ne s'enchaîne pas tel quel — remis dans l'ordre, il devient $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.

$$\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} \\ \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

Le vecteur rouge remonte d'un cran, et la chaîne se referme.

3. Je coupe quand je bloque

Chasles se lit aussi à l'envers : $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$ pour N'IMPORTE quel point M . Insérer un point de passage bien choisi débloque presque tous les exercices sans repérage.

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$$

Le point rouge est libre : on le choisit.

Selon ce que l'on cherche : les vecteurs du plan

Prouver un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$. ★ C'est la deuxième preuve du programme, à côté de celle par les milieux des diagonales — et celle-ci ne demande aucun repère.

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$



$ABCD$ parallélogramme

Les deux côtés rouges, parcourus dans le même sens.

Placer un point

Une égalité vectorielle DÉFINIT un point, et un seul.

$\vec{AM} = 2\vec{AB}$ place M tel que B soit le milieu de $[AM]$;
 $\vec{AM} = -\vec{AB}$ place M symétrique de B par rapport à A .

$$\vec{AM} = 2\vec{AB} \Rightarrow$$

B milieu de $[AM]$

$$\vec{AM} = -\vec{AB} \Rightarrow$$

A milieu de $[BM]$

C'est le coefficient rouge qui dit où l'on tombe.

Prouver un alignement

A, B, C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont COLINÉAIRES. En coordonnées, on le teste par le déterminant $xy' - x'y = 0$.

$$\vec{AC} = \textcolor{red}{k} \vec{AB}$$



A, B, C alignés

Un seul nombre rouge suffit : s'il existe, les trois points sont alignés.

Exemples corrigés : les vecteurs du plan

Deux vecteurs opposés

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$.

Sont-ils égaux ?

$$\vec{BA} = -\vec{AB}$$

Seul le signe rouge les sépare : ils sont opposés, pas égaux.

Non. Ils ont la même direction et la même norme, mais des sens opposés : $\vec{BA} = -\vec{AB}$. ★ Leur somme vaut donc $\vec{0}$ — on part de A , on revient en A .

Chasles avec un détour

$\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC}$.

Simplifier.

$$\vec{AB} + \vec{CD} + \textcolor{red}{\vec{BC}}$$

$$\vec{AB} + \textcolor{red}{\vec{BC}} + \vec{CD}$$

$$\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

On remonte le vecteur rouge, puis la chaîne se referme d'elle-même.

Tel quel, rien ne s'enchaîne. Mais une somme se réordonne : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$. Alors $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, puis $\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$. Le résultat est $\vec{AD}$ — on part de la première lettre et on arrive à la dernière.

— La différence

$$\vec{AB} - \vec{AC}.$$

Simplifier.

$$\begin{array}{c} \vec{AB} - \vec{AC} \\ \vec{CA} + \vec{AB} \\ \vec{CB} \end{array}$$

Les deux partent du même point rouge — et c'est lui qui disparaît.

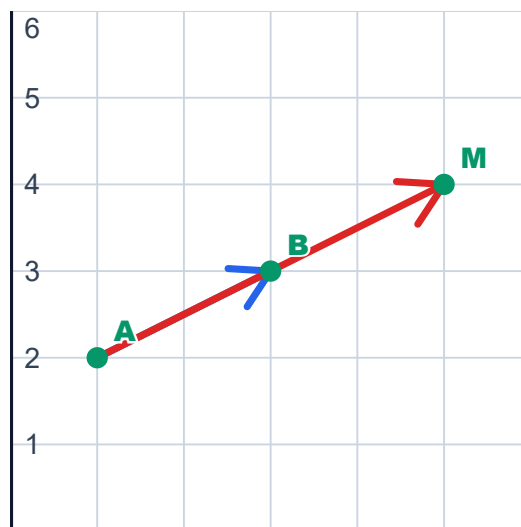
Soustraire, c'est ajouter l'opposé : $-\vec{AC} = \vec{CA}$.

Donc $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$. — Et non $\vec{BC}$: les deux vecteurs partent du même point A , et le résultat va du SECOND vers le PREMIER.

Placer un point

M est le point tel que $\vec{AM} = 2\vec{AB}$.

Où se trouve M ?



On part de A et on parcourt DEUX fois le déplacement qui mène à B , dans le même sens. On arrive donc au-delà de B , à la même distance : A, B, M sont alignés dans cet ordre et $AB = BM$. Autrement dit, B est le milieu de $[AM]$ — et M est la symétrique de A par rapport à B .

Pièges à éviter : les vecteurs du plan

— $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$, et non $\vec{BC}$. Soustraire, c'est ajouter l'opposé, et l'opposé retourne les lettres. C'est le piège numéro un du chapitre.

— $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$ ne sont pas égaux : ils sont OPPOSÉS. Seul le sens change, mais ça suffit.

— Un vecteur n'a pas de position. Deux flèches éloignées l'une de l'autre sont le même vecteur si direction, sens et norme coïncident — c'est même tout l'intérêt de la notion.

— $\vec{AB} = \vec{DC}$ donne le parallélogramme $ABCD$, mais $\vec{AB} = \vec{CD}$ donne $ABDC$. L'ordre des sommets se lit sur l'égalité, il ne se devine pas.

— Les coordonnées d'un vecteur sont l'ARRIVÉE MOINS LE DÉPART : $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$. Dans l'autre sens, on obtient $\vec{BA}$.

— Une norme n'est jamais négative : c'est une longueur. Si un calcul en donne une, c'est qu'on a oublié un carré.

À retenir : les vecteurs du plan

Un vecteur, c'est trois données : direction, sens, norme — et aucune position.

Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ — la lettre du milieu disparaît.

Et à l'envers : $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$ pour n'importe quel M .

— $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ — l'ordre s'inverse.

$ABCD$ parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{DC}$.

Coordonnées : arrivée moins départ. Norme : $\sqrt{x^2 + y^2}$, en repère orthonormé.

Exercices corrigés : les vecteurs du plan

1. Que peut-on dire de $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$?

Correction :

Ils sont opposés : $\vec{BA} = -\vec{AB}$. Même direction, même norme, sens contraires. Leur somme vaut $\vec{0}$.

2. On sait que $\vec{AB} = \vec{DC}$. Quelle est la nature de $ABCD$?

Correction :

Un parallélogramme. Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, de même longueur et orientés pareil.

3. Simplifier $\vec{EF} + \vec{FG}$.

Correction :

$\vec{EG}$, par Chasles : la lettre F est le point de passage, elle disparaît.

4. Simplifier $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC}$.

Correction :

On réordonne en $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$, ce qui donne $\vec{AD}$. Une somme de vecteurs se réorganise librement.

5. Simplifier $\vec{MN} - \vec{MP}$.

Correction :

$$\vec{MN} - \vec{MP} = \vec{MN} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{MN} = \vec{PN}. \text{ ⚡ Et non } \vec{NP} : \text{c'est son opposé.}$$

6. Simplifier $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$.

Correction :

$$\vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}. \text{ Le circuit est fermé : on revient au point de départ.}$$

7. Où se trouve le point M tel que $\vec{AM} = -\vec{AB}$?

Correction :

Le coefficient négatif retourne le sens : M est de l'autre côté de A , à la même distance que B . Donc A est le milieu de $[BM]$.

8. Le point M vérifie $\vec{AM} = \vec{BC}$. Que peut-on dire de $ABCM$?

Correction :

C'est un parallélogramme : $\vec{AM} = \vec{BC}$ équivaut à $\vec{AB} = \vec{MC}$, donc $[AB]$ et $[MC]$ sont parallèles et de même longueur.

9. Calculer les coordonnées de $\vec{AB}$ avec $A(-2; 3)$ et $B(1; -1)$.

Correction :

$$\text{Arrivée moins départ : } (1 - (-2); -1 - 3) = (3; -4).$$

10. Calculer la norme du vecteur $\vec{u}(3; -4)$ en repère orthonormé.

Correction :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \text{ Le carré efface le signe : une norme est toujours positive.}$$