

Les volumes — cours de maths 4e

Après la longueur d'un trait et la surface d'une figure, voici la place qu'un objet occupe dans l'espace. On la compte en cubes, et une seule formule suffit pour presque tous les solides du collège : l'aire de la base, multipliée par la hauteur. Tout le reste n'est qu'une façon différente de calculer cette base.

LE MOT CLÉ

La place occupée dans l'espace

LE GESTE

Aire de base $\times$ hauteur

LA RÈGLE D'OR

Des cm^3 : l'unité est un cube

À quoi ça sert : les volumes

Le volume, c'est ce qui rentre dedans. Une réserve d'eau en forme de pavé de 3 m sur 2 m et 2 m de haut contient 12 m^3 , c'est-à-dire 12 000 litres — et à La Réunion, où la saison sèche compte, cette conversion-là n'est pas un exercice. C'est aussi le volume d'un colis qui fixe son prix d'expédition, celui d'un camion-toupie de béton, celui d'une piscine qu'on remplit, ou celui d'un moteur qu'on mesure en centimètres cubes. Un litre EST un décimètre cube : ce n'est pas une coïncidence, c'est la définition — et c'est pourquoi une bouteille d'un litre tient exactement dans un cube de 10 cm de côté.

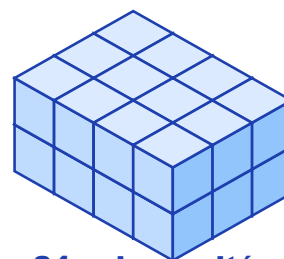
Un peu d'histoire : les volumes

Le mot vient du latin « volumen », qui désignait un rouleau de papyrus — ce qu'on enroule. Il a longtemps voulu dire « livre » avant de désigner l'encombrement d'un objet, et il garde les deux sens en français. Quant à la mesure elle-même, la plus célèbre histoire est celle d'Archimède : chargé de vérifier si une couronne était en or pur sans la fondre, il aurait compris dans son bain que tout corps plongé dans l'eau en déplace exactement son propre volume. La méthode est encore la bonne aujourd'hui pour un objet de forme compliquée : on ne la calcule pas, on la mesure en la plongeant.

Définition : les volumes

Le volume d'un solide est la mesure de la place qu'il occupe dans l'espace. Pour le mesurer, on choisit comme unité un CUBE — un cube d'un centimètre d'arête a un volume de 1 cm^3 — et le volume du solide est le nombre de tels cubes qu'il faudrait pour le remplir. ⚠ Le volume ne dépend

pas de la forme : si l'on démonte un solide de 5 cubes et qu'on les range autrement, le volume reste 5. C'est la place occupée qui compte, pas la façon dont elle est arrangée.



24 cubes unités

4 rangées de 3 cubes, sur 2 étages

Chaque étage contient $4 \times 3 = 12$ cubes — c'est exactement l'aire de la base. Il y a 2 étages, donc $12 \times 2 = 24$ cubes en tout. La formule du cours est déjà dans ce dessin : aire de base $\times$ hauteur.

Propriétés : les volumes

Trois grandeurs, trois unités

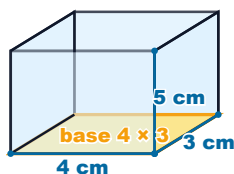
Une longueur se mesure avec un segment et s'écrit en cm ; une aire avec un carré, en cm^2 ; un volume avec un cube, en cm^3 . Le petit chiffre en haut dit combien de dimensions on a multipliées.

Données	la grandeur	son unité
	une longueur	cm
	une aire	cm^2
	un volume	cm^3

trois marches, et le petit chiffre dit laquelle

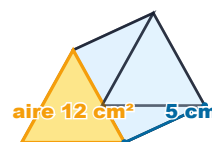
Aire de base $\times$ hauteur

L'aire de base est celle de la face sur laquelle le solide REPOSE — ici $4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$. Le volume, c'est cette base empilée sur toute la hauteur : $12 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$.



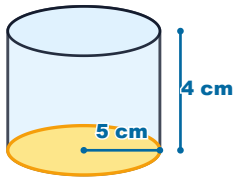
Le prisme ne change pas la règle

Si la base est un triangle au lieu d'un rectangle, la formule ne bouge pas : on calcule l'aire de ce triangle, puis on multiplie par la hauteur. Aire 12, hauteur 5, volume 60 cm^3 .



Le cylindre non plus

La base d'un cylindre est un disque, dont l'aire vaut $\pi \times r^2$. Pour un rayon de 5 cm, cela fait $25\pi \text{ cm}^2$; avec une hauteur de 4 cm, le volume est $100\pi \text{ cm}^3$.



La formule : les volumes

UNE FORMULE, TROIS SOLIDES

$$V = \text{aire de base} \times \text{hauteur}$$

▪ **pavé** : $L \times l \times h$

▪ **cylindre** : $\pi r^2 \times h$

Les deux dernières ne sont que la première, avec la base calculée à la façon qui convient. ⚠ Et c'est bien l'AIRe de la base, jamais son périmètre : un contour ne dit rien de la surface qu'il enferme.

Méthode : les volumes

1. Trouver la base

On repère la face sur laquelle le solide repose, et on calcule SON AIRE — rectangle, triangle ou disque, selon le cas. C'est l'étape où l'on utilise tout ce qu'on sait des aires.

2. Multiplier par la hauteur

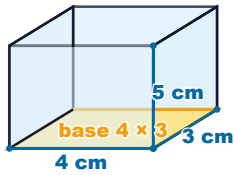
La hauteur dit combien de fois cette base s'empile. 12 cm^2 de base sur 5 cm de hauteur donnent 60 cm^3 — comme cinq étages de douze cubes.

	1	2
×		5

3. Vérifier l'unité

Un volume s'écrit toujours en unités cubes. Et les conversions vont de mille en mille : 1 $\text{dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$, parce qu'un décimètre cube est un cube de 10 cm d'arête. Enfin, 1 L = 1 dm^3 .

		1	0
		1	0



aire de base 12 cm^2
 $\times$ hauteur 5 cm

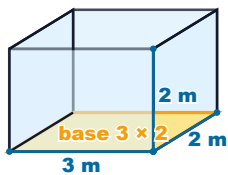
$\times$			1	0
	1	0	0	0

$1 \text{ dm}^3 = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$

Selon ce que l'on cherche : les volumes

Une réserve d'eau

Un bac de 3 m sur 2 m et 2 m de haut contient $3 \times 2 \times 2 = 12 \text{ m}^3$.
 Comme 1 m^3 vaut 1 000 litres, cela fait 12 000 litres d'eau.



Des litres aux cubes

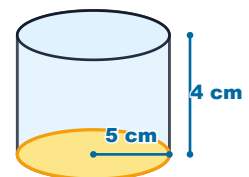
Un litre est exactement un décimètre cube, donc $1\,000 \text{ cm}^3$.
 C'est pourquoi une bouteille d'un litre tient dans un cube de 10 cm de côté.

$\times$			1	0
			1	0
			1	0
	1	0	0	0

$1 \text{ dm}^3 = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$

Un réservoir cylindrique

Une cuve ronde se calcule comme le reste : l'aire du disque du fond, multipliée par la hauteur. On garde souvent le résultat sous la forme $a\pi$.



Exemples corrigés : les volumes

Le volume d'un pavé droit

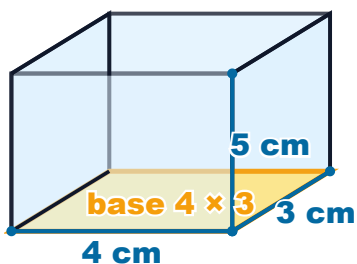
Un pavé droit mesure 4 cm de longueur, 3 cm de largeur et 5 cm de hauteur.

Quel est son volume ?

Un prisme à base triangulaire

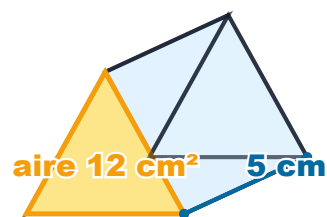
Un prisme droit a une base triangulaire d'aire 12 cm^2 et une hauteur de 5 cm.

Quel est son volume ?



L'aire de la base vaut $4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$. On multiplie par la hauteur : $12 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$. On peut aussi écrire directement $L \times l \times h = 4 \times 3 \times 5 = 60$.

⚠ Le résultat s'écrit en cm^3 : trois longueurs multipliées donnent trois dimensions.



La formule est la même que pour le pavé : $V = \text{aire de base} \times \text{hauteur} = 12 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$. ★

La base peut être n'importe quelle figure — triangle, trapèze, disque : seule la façon de calculer son aire change. Si l'énoncé donne le triangle par sa base et sa hauteur (par exemple 3 cm et 4 cm pour un triangle rectangle), on commence par $\frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$, puis on multiplie.

Les trois erreurs, et la marche ratée

Trois élèves calculent le volume du même pavé de 5 cm, 4 cm et 3 cm.

Où chacun s'est-il arrêté ?

Données	l'élève écrit	ce qu'il a calculé	où s'est arrêté
	$5 + 4 + 3 = 12$	une somme de longueurs	sur longueur
	$4 \times 3 = 12$	l'aire de la base	sur l'aire
	périmètre $\times$ hauteur	le tour, pas la surface	sur le périmètre

le pavé $4 \times 3 \times 5$ vaut 60 cm^3 , et rien d'autre

Le premier écrit $5 + 4 + 3 = 12$: il a ADDITIONNÉ des longueurs, ce qui donne une longueur, pas un volume. Le deuxième écrit $4 \times 3 = 12$: il a bien calculé l'AIRE de la base, mais il s'est arrêté là — il manque la hauteur. Le troisième multiplie le PÉRIMÈTRE de la base par la hauteur : il a pris le tour au lieu de la surface. ★ Les trois font la même faute à des étages différents de l'escalier longueur → aire → volume. La bonne réponse est $5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ cm}^3$.

Pièges à éviter : les volumes

Additionner au lieu de multiplier : un pavé de 5 cm, 4 cm et 3 cm n'a pas un volume de $5 + 4 + 3 = 12 \text{ cm}^3$, mais de $5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ cm}^3$.

S'arrêter à l'aire de la base : $4 \times 3 = 12$ donne la surface sur laquelle le solide repose, en cm^2 . Il reste à multiplier par la hauteur pour obtenir le volume, en cm^3 .

Prendre le PÉRIMÈTRE de la base au lieu de son AIRE : la formule est « aire de base $\times$ hauteur ». Le tour de la base ne dit rien de la place qu'elle occupe.

À retenir : les volumes

Le volume mesure la place qu'un solide occupe dans l'espace. On le compte en cubes unités et on l'exprime en cm^3 , dm^3 ou m^3 .

Une seule formule sert au pavé, au prisme et au cylindre : Volume = aire de base $\times$ hauteur. Seule change la façon de calculer l'aire de la base.

Le volume ne dépend pas de la forme : un solide qu'on démonte et qu'on range autrement occupe toujours la même place.

Exercices corrigés : les volumes

1. Que mesure un volume, et quelle unité choisit-on pour le mesurer ?

Correction :

La place occupée par un solide dans l'espace. L'unité est un CUBE : un cube de 1 cm d'arête vaut 1 cm^3 . ⚠ Pas un carré, qui sert aux aires, ni un segment, qui sert aux longueurs.

2. Une boîte est remplie par 4 rangées de 3 cubes unités, sur 2 étages. Combien de cubes contient-elle ?

Correction :

24. Chaque étage contient $4 \times 3 = 12$ cubes — c'est l'aire de la base — et il y a 2 étages : $12 \times 2 = 24$. C'est déjà la formule « aire de base $\times$ hauteur ».

3. Un pavé droit mesure 4 cm de longueur, 3 cm de largeur et 5 cm de hauteur. Quel est son volume ?

Correction :

$4 \times 3 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$. ⚠ Ni 12 (qui serait l'aire de la base), ni 12 non plus par addition : $5 + 4 + 3$ ne donne pas un volume.

4. Un prisme droit a une aire de base de 18 cm^2 et une hauteur de 7 cm. Quel est son volume ?

Correction :

$18 \times 7 = 126 \text{ cm}^3$. La forme de la base n'a aucune importance : dès qu'on connaît son aire, on multiplie par la hauteur.

5. Un cylindre a une aire de base de $25\pi \text{ cm}^2$ et une hauteur de 4 cm. Quel est son volume ?

Correction :

$25\pi \times 4 = 100\pi \text{ cm}^3$. On garde π dans le résultat plutôt que d'en prendre une valeur approchée : la réponse reste exacte.

6. À combien de cm^3 correspond 1 dm^3 ?

Correction :

$1\,000 \text{ cm}^3$. Un décimètre cube est un cube de 10 cm d'arête : $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$. ⚠ Pas 10 ni 100 — pour les volumes, les conversions vont de mille en mille.

7. Un élève calcule le volume d'un pavé de 5 cm, 4 cm et 3 cm et écrit $5 + 4 + 3 = 12 \text{ cm}^3$. A-t-il raison ?

Correction :

Non : il a additionné au lieu de multiplier. Une somme de longueurs reste une longueur — le résultat ne peut pas s'écrire en cm^3 . Le volume vaut $5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ cm}^3$.